ELSEVIER
Theoretical Computer Science 158 (1996) 65–79
Theoretical Computer Science

Dépendance de systèmes de numération associés à des puissances d'un nombre de Pisot

Stéphane Fabre*

7 rue Condorcet, 02000 Laon, France

Reçu juin 1994: revisé novembre 1994
Communiqué par M. Nivat

Résumé

Büchi a montré qu'un ensemble infini d'entiers était k-reconnaissable si et seulement s'il était k^n-reconnaissable (Pour k entier stictement supérieur à 1 et n entier supérieur ou égal à 1) (Büchi, 1960). Nous démontrons un résultat analogue pour des systèmes de numération associés à des nombres de Pisot qui possèdent une propriété arithmétique supplémentaire.

Abstract

A classical result of Bushi that a set is k-recognizable if and only if it's k^n-recognizable. We establish a similar result for number-systems associated to Pisot–Vijayaraghavan numbers which satisfy some additional condition.

The θ-expansion of 1 (noted $D_\theta(1)$) is the infinite sequence of positive integers $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined as follows (Bertrand, 1986; Parry, 1960): Let $\alpha_0 = [\theta]$, $r_0 = \{\theta\}$, and for every integer n, $\alpha_{n+1} = [\theta\, r_n]$, $r_{n+1} = \{\theta r_n\}$ (where $[x]$ denotes the integral part and $\{x\}$ the fractional part of x).

It's known (Parry, 1960) that P.V.-numbers are "β-numbers" i.e.: either the θ-expansion of 1 is finite ($D_0(1) = \alpha_0 \ldots \alpha_n$), or the θ-expansion of 1 is eventually periodic ($D_\theta(1) = \alpha_0 \ldots \alpha_n(\alpha_{n+1} \ldots \alpha_{n+m})^\omega$). We define a polynomial Q_θ by $Q_\theta(x) = x^{n+1} - \alpha_0 x^n - \alpha_1 x^{n-1} - \cdots - \alpha_n$ in the first case, and by $Q_\theta(x) = (x^{n+m+1} - \alpha_0 x^{n+m} - \alpha_1 x^{n+m-1} - \cdots - \alpha_{n+m}) - (x^{n+1} - \alpha_0 x^n - \alpha_1 x^{n-1} - \cdots - \alpha_n)$ in the latter case. θ is a root of Q_θ; when Q_θ is the minimal polynomial of θ, we say that θ has the Π-property (that is always the case for quadratic P.V.-numbers).

To θ is associated a "θ-number-system" of the some type as the well-known Fibonacci number-system (Knuth, 1968). A subset of integers S is U_θ-recognizable if the language of all finite words given by the U_θ-coding of integers in S is recognizable by a finite automaton.

Our main result: "Let θ be a P.V.-number. If θ and $\theta^n (n \geqslant 1)$ have the Π-property, then a subset of integers is U_θ-recognizable if it's $U_\theta n$-recognizable".

* Correspondance address: Universite Parix XIII, Department de Mathematiques, Avenue J-13, Clement, F-93430 Villetaneuse, France.

SSDI 0304-3975(95)00042-9

1. Notations, rappels

Dans ce paragraphe, nous rappelons les définitions et les principaux résultats contenus dans [3], puis nous présentons notre problème par un exemple.

1.1. Notations

Nous ne travaillons qu'avec des alphabets finis $\Sigma = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, avec $k \geqslant 2$, dont les éléments sont appelés les lettres. L'ensemble Σ^* désigne le monoïde libre engendré par Σ: un élément u de Σ^* est une suite finie de lettres de Σ appelé un mot, le mot vide est noté ε. Si pour quatre mots u, v, s et t de Σ^* nous avons $u = vst$, v *est* un préfixe de u, t un suffixe de u et s un facteur de u.

Nous notons $|u|$ la longueur d'un mot u, en particulier $|\varepsilon| = 0$.

Le mot de longueur n ne comportant que la lettre a est noté a^n.

1.2. Nombre de Pisot, θ-système de numération

Un nombre de Pisot est un entier algébrique strictement plus grand que 1 dont tous les conjugués (i.e. les autres racines de son polynôme minimal) ont un module strictement plus petit que 1. Dans toute la suite θ désignera toujours un nombre de Pisot.

Nous définissons le θ-développement de 1 (noté $D_\theta(1)$) comme la suite infinie suivante d'entiers positifs $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [7, 1]: $\alpha_0 = [\theta]$, $r_0 = \{\theta\}$ ($[x]$ désignant la partie entière de x et $\{x\}$ la partie fractionnaire de x), pour tout entier n, $\alpha_{n+1} = [\theta r_n]$, $r_{n+1} = \{\theta r_n\}$.

Un nombre de Pisot est [7]:

- soit un *β-nombre* si son θ-développement est ultimement périodique (i.e. $D_0(1) = \alpha_0 \ldots \alpha_n (\alpha_{n+1} \ldots \alpha_{n+m})^\omega$);
- soit un *β-nombre simple* si son θ-développement est fini (i.e. $D_\theta(1) = \alpha_0 \ldots \alpha_n$).

A tout nombre de Pisot θ, on peut associer un polynôme $Q_0(x)$ de $\mathbb{Z}[X]$ défini à partir du θ-développement de 1 [1]:

- Si $D_\theta(1) = \alpha_0 \ldots \alpha_n$, alors $Q_\theta(x) = x^{n+1} - \alpha_0 x^n - \alpha_1 x^{n-1} - \cdots - \alpha_n$.
- Si $D_\theta(1) = \alpha_0 \ldots \alpha_n (\alpha_{n+1} \ldots \alpha_{n+m})^\omega$, alors $Q_\theta(x) = (x^{n+m+1} - \alpha_0 x^{n+m} - \alpha_1 x^{n+m-1} - \cdots - \alpha_{n+m}) - (x^{n+1} - \alpha_0 x^n - \alpha_1 x^{n-1} - \cdots - \alpha_n)$.

Le réel θ est toujours racine du polynôme $Q_\theta(x)$, mais si de plus $Q_\theta(x)$ est le polynôme minimal de θ, nous disons que θ possède la propriété Π.

Un système de numération est un couple $((U_n)_{n \in \mathbb{N}}; \Sigma)$, où $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers (appelée la base) et Σ un ensemble fini (l'alphabet ou ensemble des chiffres). Dans le système $((U_n)_{n \in \mathbb{N}}; \Sigma)$ un entier m admet le mot $a_0 \ldots a_n$ de Σ^* comme représentant, si on a l'égalité: $m = a_0 U_n + \cdots + a_n U_0$.

Nous écrivons toujours les mots représentant un entier dans le sens décroissant de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Avec A. Bertrand introduisons *les β-systèmes de numération* définis à partir d'un β-nombre quelconque ([1], voir aussi [4]):

- Si $D_0(1) = \alpha_0 \ldots \alpha_n$, alors

$$U_0 = 1,$$

$$U_i = \alpha_0 U_{i-1} + \alpha_1 U_{i-2} + \cdots + \alpha_{i-1} U_0 + 1 \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n;$$

$$U_i = \alpha_0 U_{i-1} + \alpha_1 U_{i-2} + \cdots + \alpha_n U_{i-(n+1)} \quad \text{pour } i \geqslant n + 1.$$

- Si $D_\theta(1) = \alpha_0 \ldots \alpha_n(\alpha_{n+1} \ldots \alpha_{n+m})^\omega$, alors

$$U_0 = 1,$$

$$U_i = \alpha_0 U_{i-1} + \alpha_1 U_{i-2} + \cdots + \alpha_{i-1} U_0 + 1 \quad \text{pour tout } i \geqslant 1.$$

- Dans les deux cas $\Sigma = \{0, 1, \ldots, [\theta]\}$. Pour toute la suite et s'il n'y a pas d'ambiguïté, Σ designe toujours l'alphabet $\{0, 1, \ldots, [\theta]\}$.

Dans de tels systèmes, tout entier non nul admet un représenrtant unique ne comportant aucun facteur supérieur ou égal à $D_\theta(1)$ pour l'ordre lexicographique [1, 4], et ne débutant pas par la lettre 0: nous l'appelons *le représentant normalisé* de l'entier.

Exemples. Nous notons $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ le "nombre d'or". Nous trouvons $D_\phi(1) = 11$, ce qui implique que la base du système de numération associé à ϕ est la suite de Fibonacci (soit 1, 2, 3, 5, etc.), et l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Nous trouvons le système de numération de Fibonacci dans lequel le nombre 8 admet trois représentants ne débutant pas par un 0: les mots 10000, 1011 et 1100, le premier étant le représentant normalisé de 8.

- Pour $\phi^2 = (3 + \sqrt{5})/2$, $D_{\phi^2}(1) = 21^\omega$. Ici, la base du système est la suite des entiers apparaissant à des rangs impairs dams la suite de Fibonacci (soit 1, 3, 8 etc), l'alphabet étant $\Sigma = \{0, 1, 2\}$. Le nombre 8 admet deux représentants: les mots 100 et 22, le premier est le représentant normalisé de 8.
- Dans les deux cas, $Q_\theta(x)$ est le polynôme minimal de θ.
- Soit ρ le nombre de Pisot dont le polynôme minimal est: $P_\rho(x) = x^3 - x - 1$. Par le calcul, nous trouvons $D_\rho(x) \neq P_\rho(x)$, et ρ n'a pas la propriété Π.

Par analogie avec la notion de k-reconnaissabilité, nous disons qu'une partie de $\mathbb{N}$ est U_θ-reconnaissable si, en base θ, l'ensemble des représentants normalisés de ses éléments forme un langage reconnaissable par automate.

1.3. Conjugaison de substitutions, suites θ-automatiques

Définition. Pour nous, une substitution est un triplet $\omega = (\omega, A, a_0)$ où: A est un alphabet fini, ω une application de A dans A^*(prolongeable en un morphisme de A^* dans A^*) et a_0 une lettre de A, telle que $\omega(a_0) = a_0 u$ (u un mot différent du mot vide de A^*) (pour des précisions voir [8]).

On peut alors définir dans $A^{\mathbb{N}}$ le point fixe de la substitution $X_\omega = \lim_{n\to\infty}(\omega(a_0))^n$. Nous notons $a(n)$ la $(n+1)$-ième lettre de X_ω, et $u(n, n+p)$ le mot $a(n) \ldots a(n+p)$.

Si un mot u de A^* apparaît au rang n et au rang m dans X_ω, nous notons: $u(n, n+p) \approx u(m, m+p)$.

La matrice d'occurrences M de la substitution ω est la matrice positive telle que $M(i,j) = n$ si $\omega(a_i)$ contient n lettres a_j.

Nous rappelons maintenant les notions introduites dans [3], ainsi que certaines de leurs propriétés.

- Soient $\omega = (\omega, A, a_0)$ et $\tau = (\tau, B, b_0)$ deux substitutions, nous disons que h est un *morphisme* de ω dans τ si h est une application de A dans B telle que:

  1 – $h(a_0) = b_0$;

  2 – pour toute lettre a de A, $h(\omega(a)) = \tau(h(a))$. Nous notons $\omega \to \tau$.

- Les substitutions $\omega = (\omega, A, a_0)$ et $\tau = (\tau, B, b_0)$ sont *conjuguées* s'il existe une substitution $\sigma = (\sigma, C, c_0)$ telle que $\sigma \to \omega$ et $\sigma \to \tau$.

Propriétés. (1) ω let τ sont conjuguées si et seulement si pour tout entier n, $|\omega(a(n))| = |\tau(b(n)|$.

(2) La conjugaison est une relation d'équivalence, et nous notons $C(\omega)$ la classe de la substitution ω.

Nous définissons une substitution, notée ω_θ, à partir de $D_\theta(1)$ de la façon suivante:

- si $D_\theta(1) = \alpha_0 \ldots \alpha_n$, alors $\omega_\theta = (\omega_\theta, \{0, 1, \ldots, n\}, 0)$:

$$0 \to 0^{\alpha_0}1; \quad 1 \to 0^{\alpha_1}2; \quad \ldots; \quad n-1 \to 0^{\alpha_{n-1}}n; \quad n \to 0^{\alpha_n}.$$

- si $D_\theta(1) = (\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n)(\alpha_{n+1}\alpha_{n+2} \ldots \alpha_{n+m})^\omega$, alors $\omega_\theta = (\omega_\theta, \{0, 1, \ldots, n+m\}, 0)$:

$$0 \to 0^{\alpha_0}1; \quad 1 \to 0^{\alpha_1}2; \quad \ldots; \quad n+m-1 \to 0^{\alpha_{n+m-1}}(n+m); \quad n+m \to 0^{\alpha_{n+m}}(n+1).$$

Propriétés. (1) Le polynôme caractéristique associé à la matrice d'occurrences de ω_θ est égal à un signe près à $Q_\theta(x)$.

(2) La suite $(|\omega_\theta^n(0)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à la base du système de numération associé à θ.

Quelle que soit la substitution ω_θ définie comme précédemment, les substitutions appartenant à la classe de $C(\omega_\theta)$ seront appelées θ-substitutions.

Par extension de la définition des suites k-automatiques, nous dirons que la suite $b(n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $B^{\mathbb{N}}$ (B un alphabet fini) est θ-automatique s'il existe une θ-substitution $\omega = (\omega, A, a_0)$ et une application littérale $h: A \to B$ telle que $h(X_\omega) = b(n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous obtenons alors le théorème suivant:

Théorème 0. *Une partie infinie de $\mathbb{N}$ est U_θ-reconnaissable si et seulement si sa fonction caractéristique (suite infinie appartennat à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$) est θ-automatique.*

Büchi a démontré le théorème suivant [2]:

Théorème. *Une partie infinie de $\mathbb{N}$ est k-reconnaissable si et seulement si elle est k^n-reconnaissable ($k > 1$ et $n \geqslant 1$).*

Nous démontrons ici un théorème analogue pour les θ-systèmes de numération:

Théorème. *Soit θ un nombre de Pisot tel que θ et θ^n ($n \geqslant 1$) aient la propriété Π. Une partie infinie de $\mathbb{N}$ est U_θ-reconnaissable si et seulement si elle est U_{θ^n}-reconnaissable.*

Remarque. Nous savons que si θ est un nombre de Pisot de degré n, il en est de même de toutes ses puissances (voir [1] par exemple). Grâce aux résultats de C. Frougny [5] sur les mombres de Pisot quadratiques, nous pouvons affirmer que tout nombre de Pisot quadratique à le propriété Π. Notre théorème est donc valable pour ces nombres, et en particulier, pour le "nombre d'or" et ses puissances.

1.4. L'exemple des ensembles reconnaissables en base de Fibonacci

(1) Pour "le nombre d'or" ϕ, $D_\phi(1) = 11$ et par, définition, la substitution $\omega_\phi = (\omega_\phi, \{0, 1\}, 0)$:

$$0 \to 01, \qquad 1 \to 0.$$

Ecrivons le point fixe de cette substitution X: 0100101001 ...

Si $x(n)$ désigne la $(n + 1)$-ième lettre de X (attention on débute par $x(0)$), alors $x(n) = 1$ si et seulement si le représentant normalisé de n dans le ϕ-système de numération se termine par 1 (voir [6] par exemple). Il est clair alors que $S = \{n$ entier$/x(n) = 1\}$ est un ensemble U_ϕ-reconnaissable. Est-ce que l'ensemble S est U_{ϕ^2}-reconnaissable?

(2) Pour ϕ^2, $D_{\phi^2}(1) = 21^\omega$, et la substitution $\omega_{\phi^2} = (\omega_{\phi^2}, \{0, 1\}, 0)$ est:

$$0 \to 001, \qquad 1 \to 01.$$

L'égalité suivante est classique (Y point fixe de ω_{ϕ^2}): $Y = OX$ $(*)$. Il suffit de remarquer que pour tout entier n on a que $0(\omega_\phi)^{2n}(0) = (\omega_{\phi^2})^n(0)0$ et $0(\omega_\phi)^{2n}(10) = (\omega_{\phi^2})^n(01)0$. Considérons la substitution $\tau = (\tau, \{(00), (01)\}, (00))$ opérant sur les mots de 2 lettres apparaissant dans Y et définie (pour a et $b \in \{0, 1\}$) par (méthode utilisée dans [8]):

$$\tau(ab) = (a_0 a_1)(a_1 a_2) \ldots (a_n b_0) \text{ si } \omega_{\phi^2}(a) = a_0 a_1 \ldots a_n \text{ et } \omega_{\phi^2}(b) = b_0 b_1 \ldots b_m.$$

On a τ:

$$(00) \to (00)(01)(10), \qquad (01) \to (00)(01)(10), \qquad (10) \to (01)(10).$$

Il est facile de montrer que τ est une ϕ^2-substitution. Considérons l'application prolongeable h suivante:

$$\{(00), (01), (10)\} \to \{0, 1\}, \qquad (\mathrm{ab}) \to b.$$

Si Z définit le point fixe de la substitution τ, on obtient grâce à l'égalité $(*)$: $X = h(Z)$.

En utilisant le théorème 0, on peut alors conclure que S est un ensemble U_{ϕ^2}-reconnaissable.

(3) Dans [3], nous considérons l'ensemble T des entiers dont l'écriture en basc de Fibonacci comporte un nombre impair de 1. Sa fonction caractéristique est obtenue par codage littéral du point fixe de la ϕ-substitution $\sigma = (\sigma, \{A, B, C, D\}, A)$ suivante:

$$A \to AB, \qquad B \to C, \qquad C \to CD, \qquad D \to A.$$

Le codage est alors: $g(A) = g(D) = 0$ et $g(B) = g(C) = 1$.

Plaçons le point fixe V de σ au-dessus de Y, découpés en mots de la longueur de $\omega_{\phi^2}(0)$ ou de $\omega_{\phi^2}(1)$:

V: $ABC\ CDC\ DA\ CDA\ ABC\ DA\ ABA\ BC\ldots$

Y: 001 001 01 001 001 01 001 01 ...

Nous savons que pour toute lettre a de $\{0, 1\}$ et pour tout entier n les mots $(\omega_\phi)^{2n}(a)$ et $(\omega_{\phi^2})^n(a)$ contiennet le même nombre de 0 et de 1 (car les substitutions $(\omega_\phi)^2$ et (ω_{ϕ^2}) ont la même matrice d'occurrences). Nous pouvons alors considérer une substitution qui à un mot

$$\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

associe

$$\begin{pmatrix} \sigma^2(v) \\ \omega_{\phi^2}(u) \end{pmatrix}$$

où v est un mot de $\{A, B, C, D\}^*$ et u un mot de $\{0, 1\}^*$ tels que $g(v)$ et u ont le même nombre de 1 et de 0. Cette substitution qui a pour point fixe $\binom{V}{Y}$, est la suivante:

$$\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} BC \\ 01 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} DC \\ 01 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} BC \\ 01 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} DA \\ 01 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} BC \\ 01 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} DC \\ 01 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} DA \\ 01 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} DA \\ 01 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} BA \\ 01 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} BC \\ 01 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} DA \\ 01 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} BA \\ 01 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} DA \\ 01 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} BC \\ 01 \end{pmatrix}.$$

A partir de cette substitution nos construisons la ϕ^2-substitution v suivante:

– $v = (v, \{A(0), \ldots, D(C), A(0)\})$:

$$A(0) \to A(0)B(C)C(1), \qquad C(0) \to C(0)D(A)A(1), \qquad A(1) \to B(C)C(1),$$

$$B(C) \to C(0)D(C)C(1), \qquad D(C) \to A(0)B(C)C(1), \qquad B(A) \to C(0)D(C)A(1),$$

$$C(1) \to D(A)A(1), \qquad D(A) \to A(0)B(A)A(1).$$

– Soit l'application $h: \{A(0), \ldots, D(C)\} \to \{A, \ldots, D\}$.

$$a(b) \to a.$$

Si W définit le point fixe de la substitution v, le mot infini $h(W)$ correspond à la fonction caractéristique de T. Par le Théorème 0, on conclut que T est U_{ϕ^2}-reconnaissable.

Remarque. La méthode utilisée ici est valable pour montrer que tout ensemble U_ϕ-reconnaissable est U_{ϕ^2}-reconnaissable. Son principe découle de la méthode générale, mais il est simplifié grâce aux propriétés combinatoires des substitutions ω_ϕ et ω_{ϕ^2}.

2. Cas général

Nous donnas une condition nécessaire et suffisante pour qu'un mot infini quelconque soit obtenu par codage littéral du point fixe d'une substitution appartenant à une classe $C(\omega)$ donnée.

Définitions. Soient $\omega = (\omega, A, a_0)$ une substitution et V un mot infini défini sur un alphabet B. Définissons l'application suivante:

$$\Phi_\omega : B \times \mathbb{N} \to B^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

$$b(n) \to V(m, m+p), \text{ si } \omega(a(n)) = a(m) \ldots a(m+p).$$

Remarques. (1) $V(m, m+p)$ sera aussi considéré comme un élément de B^* (par exemple quand nous utiliserons la relation $\approx$).

(2) Dans ce qui suit, quand il n'y aura aucune ambiguïté, nous écrirons Φ_ω au lieu de Φ.

(3) On a, pour tout entier k, $\Phi_\omega^k(b(n)) = \Phi_{(\omega^k)}(b(n))$.

(4) Définissons maintenant sur V la relation d'équivalence R suivante:

$b(n)\ Rb'(m)$ si pout tout entier k, les mots de B^* correspondant à $\Phi^k(b(n))$ et $\Phi^k(b'(m))$ sont identiques (i.e. $\Phi^k(b(n)) \approx \Phi^k(b'(m))$). En particulier nous aurons $b = b'$ pour $k = 0$.

Proposition 1. *Soient $\omega = (\omega, A, a_0)$ une substitution et V un mot infini défini sur un alphabet B. Le mot V est obtenu par codage littéral du point fixe d'une substitution de $C(\omega)$ si et seulement si le nombre de classes modulo R sur V est fini.*

Preuve. (a) Montrons que si V est obtenu par codage littéral du point fixe d'une substitution de $C(\omega)$ alors le nombre de classes modulo R su V est fini.

Il existe une substitution $\sigma = (\sigma, C, c_0)$ appartenant à $C(\omega)$ et une appliction h de C dans B telle que $h(X_\sigma) = V$, donc pour tout entier k on a que $h(\sigma^k(c(n))) = \Phi^k(b(n))$, ce qui implique le résultat.

(b) Montrons maintenant que si le nombre de classes modulo R sur V est fini alors V est obtenu par codage littéral du point fixe d'une substitution de $C(\omega)$.

Soit $\{\overline{b(0)}, \ldots, \overline{b(n)}\}$ l'ensemble des classes modulo R sur V. Nous allons construire une substitution $\sigma = (\sigma, C, c_0)$ de $C(\omega)$ et une application h de C dans B telle que $h(X_\sigma) = V$. Posons $C = \{\overline{b(0)}, \ldots, \overline{b(n)}\}$, $c(0) = \overline{b(0)}$, et définissons σ de la manière suivante:

$$\overline{b(n)} \to \sigma(\overline{b(n)}) = \overline{b_1(m)} \ldots \overline{b_p(m+p)} \quad \text{si} \quad \Phi(b(n)) = b_1(m) \ldots b_p(m+p).$$

Grâce aux propriétés de V, $\sigma(\overline{b(n)})$ ne dépend pas du représentant de $\overline{b(n)}$ et cette substitution appartient à $C(\omega)$ (car $|\sigma(\overline{b(n)})| = |\Phi(b(n)| = |\omega(a(n)|$ pour tout entier n).

Nous définissons alors l'application h comme suit: $h(\overline{b(n)}) = b$, et on a bien $h(X_\sigma) = V$. La proposition 1 est ainsi démontrée. □

Proposition 2. *Soient $\omega = (\omega, A, a_0)$ une substitution, V un mot infini défini sur un alphabet B et k un entier non nul. Le mot V est obtenu par codage littéral du point fixe d'une substitution de $C(\omega)$ si et seulement s'il est obtenu par codage littéral du point fixe d'une substitution de $C(\omega^k)$.*

Preuve. (a) Si le mot V est obtenu par codage littéral du point fixe d'une substitution σ de $C(\omega)$, il sera évidemment obtenu par codage littéral du point fixe d'une substitution de $C(\omega^k)$ (en prenant la puissance k-ième de la substitution σ)

(b) Montrons maintenant la réciproque. Supposons que V soit obtenu par codage littéral d'une substitution $\sigma = (\sigma, C, c_0)$ de $C(\omega^k)$.

Considérons les k-uplets de mots de V $(b(n), \Phi(b)(n)) \ldots \Phi^{k-1}(b(n)))$ définis pour toute lettre $b(n)$ de V. Nous avons:

$$\text{pour } i = qk + j, \quad j \in \{0, \ldots, k-1\}, \quad \Phi^i(b(n)) = \Phi^q_{(\omega^k)}(\Phi^j(b(n))).$$

Soient $b(n)$ et $b(m)$ deux lettres de V telles que:

$$(b(n), \Phi(b(n)), \ldots, \Phi^{k-1}(b(n))) \approx (b(m), \Phi(b)(m)), \ldots, \Phi^{k-1}(b(m))).$$

Nous avons alors que: pour tout entier i, $\Phi^i(b(n)) \approx \Phi^i(b(m))$ (et donc $b(n)\, R\, b(m)$) car:

$$\Phi^j(b(n)) = \Phi^q_{(\omega^k)}(\Phi^j(b((m))) \approx \Phi^q_{(\omega^k)}(\Phi^j(b(m))) = \Phi^i(b(m)).$$

Le nombre de classes modulo R_{ω^k} est fini, ainsi le nombre de k-uplets $(b(n), \Phi(b(n)), \ldots, \Phi^{k-1}(b(n)))$ est fini (car le nombre de lettres de B est fini, et pour tout $j \in \{0, \ldots, k-1\}$ l'ensemble des mots $\Phi^j(b(n))$ est lui aussi fini). Le nombre de classes modulo R est fini sur V qui est donc obtenu par codage d'une substitution de $C(\omega)$ (Proposition 1). $\square$

Exemple. Soit $\sigma = (\sigma, \{a, b, c\}, a)$ la substitution suivante de $C((\omega_\phi)^2\}$:

$$a \to abc, \qquad b \to ab, \qquad c \to cbc.$$

(1) Par la première partie de la démonstration de la Proposition 1, on a que $b(n) \approx b(m)$ si et seulement si $b(n)\, R_{(\omega_\phi)^2}\, b(m)$. Donc il y a exactement trois classes, celle de a, celle de b et celle de c.

(2) De la deuxième partie de la démonstration de la Proposition 2 on a que $b(n)\, R_{\omega_\phi}\, b(m)$ si et seulement si $(b(n), \Phi(b(n)))\ R_{(\omega_\phi)^2}(b(m), \Phi(b(m)))$. Donc les $(b(n), \Phi(b(n))$ peuvent être considérés comme les représentants des classes modulo R_{ω_ϕ}.

(3) Par la deuxième partie de la démonstration de la proposition 1 nous sommes amenés à considérer la ϕ-substitution $\tau = (\tau, \{(a, ab), \ldots, (c, ab)\}, (a, ab))$ suivante (les lettres sont de la forme $(x, \Phi_{(\omega_\phi)}(x)))$ (car il suffit de voir où est envoyé un représentant de chaque classe):

$$(a, ab) \to (a, ab)\,(b, c), \qquad (b, c) \to (c, ab),$$

$$(c, ab) \to (a, cb)\,(b, c), \qquad (a, cb) \to (c, ab)\,(b, c).$$

Soit h l'application prolongeable qui à $(x, \Phi_{(\omega_\phi)}(x))$ associe x, alors $h(X_\tau) = X_\sigma$. Le point fixe de σ peut donc être obtenu par codage littéral du point fixe d'une ϕ-substitution.

Corollaire 1. *Soit k et j deux entiers non nuls. Si le mot V est obtenu par codage littéral du point fixe d'une substitution de $C(\omega^k)$, il est obtenu par codage littéral du point fixe d'une substitution de $C(\omega^j)$.*

3. Substitutions ω_θ et ω_θ^K

Nous allons montrer dans ce paragraphe, que si ω_θ et ω_{θ^k} (définies dans § 1) sont les substitutions associées aux nombres de Pisot θ et θ^k ayant la propriété Π, alors X_{ω_θ} est θ^k-automatique, et inversement, $X_{\omega_{\theta^k}}$ est θ-automatique.

Lemme 1. *Soient $\omega = (\omega, A, a_0)$ et $\tau = (\tau, B, b_0)$ deux substitutions de point fixe respectifs u et v, telles que M_ω et M_τ (les matrices d'occurrences de ω et τ respectivement) aient le même polynôme caractéristique, le polynôme minimal d'un nombre de Pisot θ. Il existe alors une constante réelle K telle que pout tout entier N on a que $||\omega(u(0, N))| - |\tau(v(0, N)||| < K$.*

Preuve. D'après les résultats de Rauzy [9] sur les systèmes de numération associés aux substitutions nous avons:

$$u(0, N) = \omega^n(u_0)\omega^{n-1}(u_1)\dots u_n$$

où les mots u_i (pour $i \in \{0, \dots, n\}$) sont des préfixes propres de mots $\omega(a_i)$ pour une certaine lettre a_i de A. De même:

$$v(0, N) = \tau^m(v_0)\,\tau^{m-1}(v_1)\dots v_m$$

où les mots v_i (pour $i \in \{0, \dots, m\}$) sont des préfixes propres de mots $\tau(b_i)$ pout une certaine lettre b_i de B. De plus:

$$N = |\omega^n(u_0)| + |\omega^{n-1}(u_1)| + \cdots + |u_n| = |\tau^m(v_0)| + |\tau^{m-1}(v_1)| + \cdots + |v_m|.$$

Mais quel que soit le mot u_i de A^* et l'entier p nous avons [8]:

$$|\omega^p(u_i)| = \sum_{j=0}^{d} \alpha_{(i,j)}\,\theta_j^p,$$

où les $\alpha_{(i,j)}$ sont des constantes réelles dépendant de u_i, $\theta_0 = \theta$, et les θ_j sont les autres racines du polynôme caractéristique de M_ω. On a donc:

$$N = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{(i,0)}\theta^{n-i} + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{d} \alpha_{(i,j)}\,\theta_j^{n-i}.$$

Comme les mots u_i sont en nombre fini, on peut trouver une constante qui majore les $\alpha_{(i,j)}$ (pour i variant de 1 à n et j variant de 1 à d) et une constante qui les minore. Mais de plus, comme tous les conjugués de θ ont un module plus petit que 1, la série géométrique de raison θ_j converge. On peut donc trouver indépendamment de N une constante réelle positive K_1 telle que:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_{(i,0)}\,\theta^{(n-i)} - K_1 < N < \sum_{i=0}^{n} \alpha_{(i,0)}\,\theta^{(n-i)} + K_1.$$

Comme $|\omega^n(u(0, N))| = |\omega^{n+1}(u_0)| + |\omega^n(u_1)| + \cdots + |\omega(u_n)|$, on a de la même façon que:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_{(i,0)}\,\theta^{(n+1-i)} - K_1 < |\omega(u(0, N))| < \sum_{j=0}^{n} \alpha_{(i,0)}\,\theta^{(n+1-i)} + K_1.$$

En considérant cette fois la substitution τ, on peut trouver une constante L_1 vérifiant le même type d'inégalités, et nous avons:

$$0 < ||\omega(u(0, N))| - N\theta| < K_1(\theta + 1) \quad \text{et} \quad 0 < ||\tau(v(0, N))| - N\theta| < L_1(\theta + 1).$$

Il existe donc une constante réelle $K(= (K_1 + L_1)(\theta + 1))$ telle que:

pour tout entier N, $||\omega(u(0, N))| - |\tau(v(0, N))|| < K$. □

Lemma 2. *Avec les hypothèses du Lemme 1 sur les substitutions ω et τ, soit $\sigma = (\sigma, C, c_0)$ une substitution de $C(\tau)$. Il existe une constante K telle que pour tout entier N, on ait $||\omega(u(0,N)| - |\sigma(w(0,N))|| < K$, où w est le point fixe de σ.*

Preuve. Comme σ est une substitution de $C(\tau)$ on a que $|\tau(v(0,N)| = |\sigma(w(0,N))|$, donc en appliquant le Lemme 1 on a résultat. □

Lemme 3. *Avec les hypothèses du Lemme 1 sur les substitutions ω et τ, soit un mot $v(m, m+p)$ de X_τ. Pour tout entier k, le mot $\Phi_\omega^k(v(m, m+p))$ est contenu dans un mot $\tau^k(v(m-J, m+p+J))$, où J est une constante fixée ne dépendant que de ω let τ.*

Preuve. Nous écrirons Φ à la place de Φ_ω pour ne pas alourdir la notation.

(a) Pour $k = 1$, montrons que $\Phi(v(m, m+p))$ est contenu dans $\tau(v(m-i, m+p+i))$, avec i constante fixée.

Nous avons par définition de Φ, que $|\Phi(v(m, m+p))| = |\omega(u(m, m+p))|$. Nous savons (Lemme 1) qu'il existe un réel K tel que, pour tout entier $N\, ||\omega(u(0,N)| - |\tau(v(0,N)|| < K$.

Soit b'une lettre de B vérifiant: $\forall b \in B\, |\tau(b')| \leqslant |\tau(b)|$.

Soit i l'entier vérifiant: $(i-1)|\tau(b')| < K \leqslant i|\tau(b')|$.

On a que pour tout entier n, $|\tau(v(n, n+i-1))| \geqslant K$.

Comme $||\omega(u(0,m))| - |\tau(v(0,m))|| < K$, et $||\omega(u(0,m+p))| - |\tau(v(0,m+p))|| < K$, le mot $\Phi[v(m, m+p))$ est contenu dans le mot $v[|\tau(v[0,m))| - K, |\tau(v(0, m+p))| + K]$ de X_τ, et donc $\Phi(v(m, m+p))$ est contenu dans $\tau(v(m-i, m+p+i))$.

(b) Pour $k = 2$. Par ce qui précède le mot $\Phi^2(v(m, m+p)) = \Phi(\Phi(v(m, m+p)))$ est contenu dans le mot $\tau(v(m'-i, m'+p+i))$, où $v(m', m'+p') = \Phi(v(m, m+p)$. En appliquant encore une fois le cas $k = 1$ mais cette fois-ci au mot $\Phi(v(m, m+p))$, on obtient que $\Phi^2(v(m, m+p))$ est contenu dans $\tau(m'-i, m'))\, \tau^2(v(m-i, m+p+i))\, \tau(v(m'+p', m'+p'+i))$.

Remarque. Les mots $\tau(v(m'-i, m'))$ et $\tau^2(v(m-i, m+p+i))$ ont les lettres $\tau(v(m')$ en commun, ils peuvent en avoir d'autres. Similairement les mots $\tau(v(m'+p', m'+p'+i))$ et $\tau^2(v(m-i, m+p+i))$ ont au moins les lettres de $\tau(v(m'+p)$ en commun.

Pour k quelconque en réitérant le même procédé on trouve que $\Phi^k(v(m, m+p))$ est contenu dans $\tau(v(m_{k-1} - i, m_{k-1}))\, \tau^2(v(m_{k-2} - i, m_{k-2}))\; \ldots\, \tau^{k-1}(v(m'-i, m')\, \tau^k(v(m-i, m+p+i))\, \tau^{k-1}(v(m'+p', m'+p'+i)) \ldots \tau(v(m_{k-1} + p_{k-1}, m_{k-1} + p_{k-1} + i))$ (avec des possibilités de chevauchement pour deux mots consécutifs) où $m' = m_1$ et $m = m_0$. De plus on a:

$$\left|\tau(v(m_{k-1} - i, m_{k-1})) \ldots \tau^{k-1}(v(m'-i, m')\right| \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} \left|\tau^{k-j}(v(m_j - i, m_j))\right|.$$

Or nous savons que: $|\tau^{k-j}(v(m_j - i, m_j))| = \alpha_j \theta^{(k-j)} + 0(\rho_j^k)$ où α_j est une constante réelle dépendant de $v(m_j - i, m_j)$ et, $0 < \rho_j < 1$ $\lim_{k\to\infty} 0(\rho_j^k) = 0$. Mais comme les mots $v(m_j - i, m_j)$ sont en nombre fini (car de longueur fixée), on peut trouver α et 1 tels que:

$$|\tau(v(m_{k-1} - i, m_{k-1}) \ldots \tau^{k-1}(v(m' - i, m'))| \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} (\alpha\theta^j + 1) = E(k).$$

Or pour toute lettre b de B, $|\tau^k(b)| = \alpha_b\theta^k + 0(\rho^k)$ où α_b une constante réelle dépendant de b et, $0 < \rho < 1$ et $\lim_{k\to\infty} 0(\rho^k) = 0$. On peut donc trouver un entier r tel que pour toute lettre b et tout entier k on ait: $r|\tau^k(b)| \geqslant E(k)$.

Dans X_τ, pour tout entier k et tout mot $v(m, m+p)$, le mot $\Phi^k(v(m, m+p))$ est contenu dans le mot $\tau^k(v(m-i-r, m+p+i+r))$. En posant $J = i + r$, on obtient la constante recherchée.

Lemme 4. *Avec les hypothèses des Lemmes 1 et 2 sur les substitutions ω, τ et σ, soit un mot $w(m, m+p)$ de X_σ. Pour tout entier k, let mot $\Phi^k_\omega(w(m, m+p))$ est contenu dans un mot $\sigma^k(w(m-J', m+p+J')$, où J' est une constante fixée ne dépendant que de ω et σ.*

Preuve. Même preuve que le Lemme 3, en remplaçant l'usage du Lemme 1 par celui de Lemme 2. □

Lemme 5. *Avec les hypothèses du Lemme 1 sur les substitutions ω et τ, soit d le degré du polynôme minimal de θ.*

Pour $n \leqslant m$, si pour tout $k \leqslant d-1$ on a que $|\omega^k(u(0,m))| - |\omega^k(u(0,n))| = |\tau^k(v(0,m))| - |\tau^k(v(0,n))|$, alors cette égalité est vérifiée pour tout entier k.

Preuve. Comme par hypothèse les polynômes caractéristiques des matrices d'occurrence M_ω et M_τ sont égales an polynôme minimal de θ, le résultat est immédiat.

$$\text{En effet } |\omega^k(u(0,m))| - |\omega^k(u(0,n))| = |\omega^k(u(n+1,m))|$$

$$= \bar{x} M^k_\omega \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

où $\bar{x}$ est un vecteur dont la i-ème composante est le nombre de fois que la i-ème lettre de A apparaît dans $u(n+1, m)$. Donc les suites $(|\omega^k(u(0,m))| - |\omega^k(u(0,n))|)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(|\tau^k(v(0,m))| - |\tau^k(v(0,n))|)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation de récurrence induite par le polynôme minimal de θ.

Lemme 6. *Avec les hypothèses des lemme 1 et 2 sur les substitutions ω, τ et σ, soit d le degré du polynôme minimal de θ.*

Pour $n \leqslant m$ si pour $k \leqslant d-1$ on a que $|\omega^k(u(0,m))| - |\omega^k(u(0,n))| = |\sigma^k(w(0,m))| - |\sigma^k(w(0,n))|$, alors cette égalité est vérifiée pour tout entier k.

Preuve. Comme $|\tau^k(v(0,n))| = |\sigma^k(w(0,n))|$, le Lemme 6 est conséquence directe du Lemme 5. □

Proposition 3. *Avec les hypothèses du Lemme* 1 *sur les substitutions* ω *et* τ *et* d *comme dans l'énnoncé du Lemme* 3, *le point fixe* X_τ *de* τ *peut être obtenu par codage littéral du point fixe d'une substitution de* $C(\omega)$.

Preuve. Soient $b(n)$ et $b(m)$ deux lettres de X_τ telles que:

(1) $v(n-J, n+J) \approx v(m-J, m+J)$ où J est la constante du Lemme 3.

(2) les mots $v(0, n-1)$ et $v(0, m-1)$ de X_τ et les mots $u(0, n-1)$ et $u(0, m-1)$ de X_ω vérifient les hypothèses du Lemme 5.

On a: pour tout entier k, $|\omega^k(u(0, m-1))| - |\tau^k(v(0, m-1))| = |\omega^k(u(0,n-1))| - |\tau^k(v(0, n-1))|$ (Lemme 5).

Dans X_τ, nous en déduisons que pour tout entier k, le nombre de lettres entre la première lettre de $\Phi^k(b(n))$ et le première lettre de $\tau^k(b(n))$ est égal au nombre de lettres entre la première lettre de $\Phi^k(b(m))$ et la première lettre de $\tau^k(b(m))$. De plus d'après la première hypothèse, les mots $\Phi^k(b(n))$ et $\Phi^k(b(m))$ sont contenus dans le même mot $\tau^k(v(n-J, n+J))$ de B^* qui contient $\tau^k(b(n))$ (Lemme 3). Nous déduisons de ces deux remarques que pour tout entier k les mots $\Phi^k(b(n))$ et $\Phi^k(b(m))$ sont identiques, et donc $b(n)$ et $b(m)$ appartiennent à la même classe modulo R.

Il faut montrer maintenant qu'avec nos deux hypothèses nous obtenons un nombre fini de classes modulo R sur X_τ.

- Comme le cardinal de B est fini X_τ contient un nombre fini de mots de longueur $(2J+1)$.
- Il existe une constante K telle que $||\omega(u(0, n)| - |\tau(v(0, n)|| < K$ pour tout n (Lemme 1).

Pour tout entier k les mots $\omega^k(u(0, n-1))$ (respectivement $\tau^k(v(0, n-1))$) sont des préfixes du mot infini X_ω (respectivement X_τ). On a: pour tout $k \leqslant d$, $||\omega^k(u(0, n-1))| - |\tau^k(v(0, n-1))|| < K'$, où K' est une constante indépendante de n (ne dépendant que de K et d).

Aussi pour tout entier n, les $(d-1)$-uplets $(|\omega(u(0, n-1))| - |\tau(v(0, n-1))|, |\omega^2(u(0, n-1))| - |\tau^2(v(0, n-1)|, \ldots, |\omega^{d-1}(u(0, n-1))| - |\tau^{d-1}(v(0, n-1)))|)$ ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs.

On déduit de ces deux points que l'appartenance d'ueu lettre $b(n)$ à une classe modulo R résulte de paramètres qui ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs: il y a donc un nombre fini de classes.

Nous concluons en utilisant la Proposition 1 que le mot infini X_τ peut être obtenu par codage du point fixe d'une substitution de $C(\omega)$.

Corollaire 2. *Soient les substitutions* ω_θ *et* ω_θ^k *(définies dans* § 1) *associées des nombres de Pisot* θ *et* θ^k *ayant la propriété* Π, *alors* X_{ω_θ} *est* θ^k*-automatique, et inversement,* $X_{\omega_\theta^k}$ *est* θ*-automatique.*

Preuve. (a) Montrons que X_{ω_θ} est θ^k-automatique. Le point fixe de la substitution $(\omega_\theta)^k$ est X_{ω_θ}. Comm θ a la propriété Π, $|M_\omega - \lambda I|$ est le polynôme minimal de θ. Donc $|M_{\omega^k} - \lambda I|$ est le polynôme minimal de θ^k car $M_\omega - \lambda I$ divise $M_{\omega^k} - \lambda^k I$. Donc θ^k est une racine de $M_{\omega^k} - \lambda I$ et par la remarque de la page 4, c'est le polynôme minimal car du bon degré. Donc la matrice d'occurrences de la substitution $(\omega_\theta)^k$ admet comme polynôme carctéristique le polynôme minimal de θ^k. En accord avec la Proposition 3, X_{ω_θ} *est* θ^k*-automatique.*

(b) *Montrons que* $X_{\omega_{\theta^k}}$ est θ-automtique. Le mot infini $X_{\omega_{\theta^k}}$ peut être obtenu comme codage littéral du point fixe d'une substitution σ de $C((\omega_\theta)^k)$ (avec les remarques ci-dessus et la Proposition 3). Mais de plus le point fixe de σ peut être, à son tour, obtenu comme codage littéral du point fixe d'une substitution de $C(\omega_\theta)$ (Proposition 2). On en déduit que $X_{\omega_{\theta^k}}$ est θ-automatique.

Exemple. Reprenons la substitution $\sigma = (\sigma, \{a, b, c\}, a)$ de $C((\omega_\phi)^2)$:

$$a \to abc, \qquad b \to ab, \qquad c \to cbc.$$

Appelons $u = bc$, alors: $\sigma(a) = au$, et $\sigma(u) = \sigma(bc) = abcbc = auu$.

Soit maintenant la substitution $\omega_{\phi^2} = (\omega_{\phi^2}, \{0, 1\}, 0)$, appelons v le mot 01 alors:$\omega_{\phi^2}(0) = 0v$, et $\omega_{\phi^2}(v) = 0vv$. Ces remarques nous permettent de dire que si, dans X_σ, on code a et b par 0 et c par 1, alors nous obtenons $X_{\omega_{\phi^2}}$. Le mot $X_{\omega_{\phi^2}}$ est donc ϕ-automatique.

Proposition 4. *Avec les hypothèses des Lemmes* 1 *et* 2 *sur les substitutions* ω, τ *et* σ *et* d *comme dans l'énoncé du Lemme* 5, *le point fixe* X_σ *de* σ *peut être obtenu par codage littéral du point fixe d'une substitution de* $C(\omega)$.

Preuve. Même preuve que dans la Proposition 3, en remplaçant l'utilisation des Lemme 1, 3 et 5 par celle des Lemmes 2, 4 et 6 et en remplaçant B par C et J par J'. □

4. Un théorème de dépendance

Théorème. *Soit* θ *un nombre dePisot tel que* θ *et* θ^n $(n \geqslant 1)$ *aient la proprieté* Π. *Une partie infinie de* $\mathbb{N}$ *est* U_θ*-reconnaissable si et seulement si elle est* U_{θ^n}*-reconnaissable.*

Preuve. En utilisant le résultat du Théorème 0, pour démontrer notre théorème, il suffit de montrer que le point fixe d'une θ-substitution est θ^k-automatique, et inversement, que le point fixe d'une θ^k-substitution est θ-automatique.

- Soit σ une θ-substitution. Nous avons montré dans la preuve de Corollaire 2 que $(\omega_\theta)^k$ et ω_{θ^k} satisfont les hypothèses du Lemme 1. Comme X_σ est obtenu par codage littéral d'une substitution de $C(\omega_\theta)$ (donc de $C((\omega_\theta)^k)$ par la Proposition 2), en appliquant la Proposition 4 (avec $(\omega_\theta)^k$ et ω_{θ^k} et σ) nous obtenons que X_α peut être obtenu par codage littéral d'une substitution de $C(\omega_\theta^k)$. Donc X_σ est θ^k-automatique.

  L'autre direction se démontre de façon similaire. □

Corollaire 3. *Soit θ un nombre de Pisot tel que θ, θ^n et θ^m (n et $m \geqslant 1$) aient la propriéte Π. Une partie infinie de $\mathbb{N}$ est U_{θ^n}-reconnaissable si et seulement si elle est U_{θ^m}-reconnaissable.*

Question. Si θ est un nombre de Pisot ayant la propriété Π, en est-il de même de toutes ses puissances?

Remerciements

Je remercie le referee pout ses nombreuses et fructueuses remarques.

Bibliographie

[1] A. Bertrand, Répartition modulo un des suites exponentielles et systèmes dynamiques symboliques. Thèse d'Etat, Université de Bordeaux 1 (1986).

[2] J.R. Büchi, Weak second-order arithmetic and finite automata, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* **6** (1960) 66–92.

[3] S. Fabre, Substitutions et β-systèmes de numération, A paraître dans T.C.S.

[4] C. Frougny, Systèmes de numération linéaires et automates finis, Thèse d'Etat, Université Paris-VII (1989).

[5] C. Frougny, On the expansion of integers in non-integer basis, Rapport LITP 91.41, Université Paris-VII (Juin 1991).

[6] D. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. A (Addison-Wesely, Reading, MA, 1968).

[7] W. Parry, On the β-expansions of real numbers, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.* **11** (1960) 401–416.

[8] M. Queffélec, Substitution dynamical systems, Lectures Notes in Math., Vol. 1294 (Springer, Berlin, 1987).

[9] G. Rauzy, Sequences defined by iterated morphism, preprint.